Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
не объясняющему нормально электрод
рассказчику баек
и программы каждого курса мехмата и НМУ за 15 мин
стильно одевающимся
и улыбчивому, как Степаньянц
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Как мы помним из предыдущих методичек, если точка наблюдения находится много дальше, чем характерный размер области, где у нас расположены заряды, мы можем заменить точную формулу для потенциала

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint\limits_{R^3} \frac{\rho(\overrightarrow{r_1})dV(\overrightarrow{r_1})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_1}|}$$

(на всякий случай напомню, что R^3 обозначается всё пространство)
на приближённую с суммарнозарядовым слагаемым, дипольным, квадрупольным и т.д.

С магнитным полем похожая формула. Пусть у нас есть некоторая область, в которой есть токи.
Тогда векторный потенциал точки с радиусом вектором **r** будет точно

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint\limits_{R^3} \frac{\frac{\vec{j}(\overrightarrow{r_1})}{c}dV(\overrightarrow{r_1})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_1}|}$$

А приближённо? Нужно разложить в ряд. Формула для **A** очень похожа на формулу для φ (только появился коэф 1/c, если он вас смущает, можете считать не **A**, а c**A**) и то, что **A** и **j** векторы, так что фактически у нас три уравнения для каждой из проекций **A,** каждое из которых будет скалярным и уже полностью аналогичным уравнению для φ.

Поэтому нет ничего удивительного, что разложения в ряд очень похоже на разложение для потенциала. Выпишем первые два члена:

$$\overline{A} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{r}\int\limits_{R^3} \overline{j}(\overline{r}_1)\,dV(\overline{r}_1) + \frac{[\overline{m} \times \overline{r}]}{r^3}\right.$$

Где **m** – т.н. магнитный момент (чтобы не путать с массой, помним, что масса скаляр, а магнитный момент вектор).
Формула для вычисления **m:**

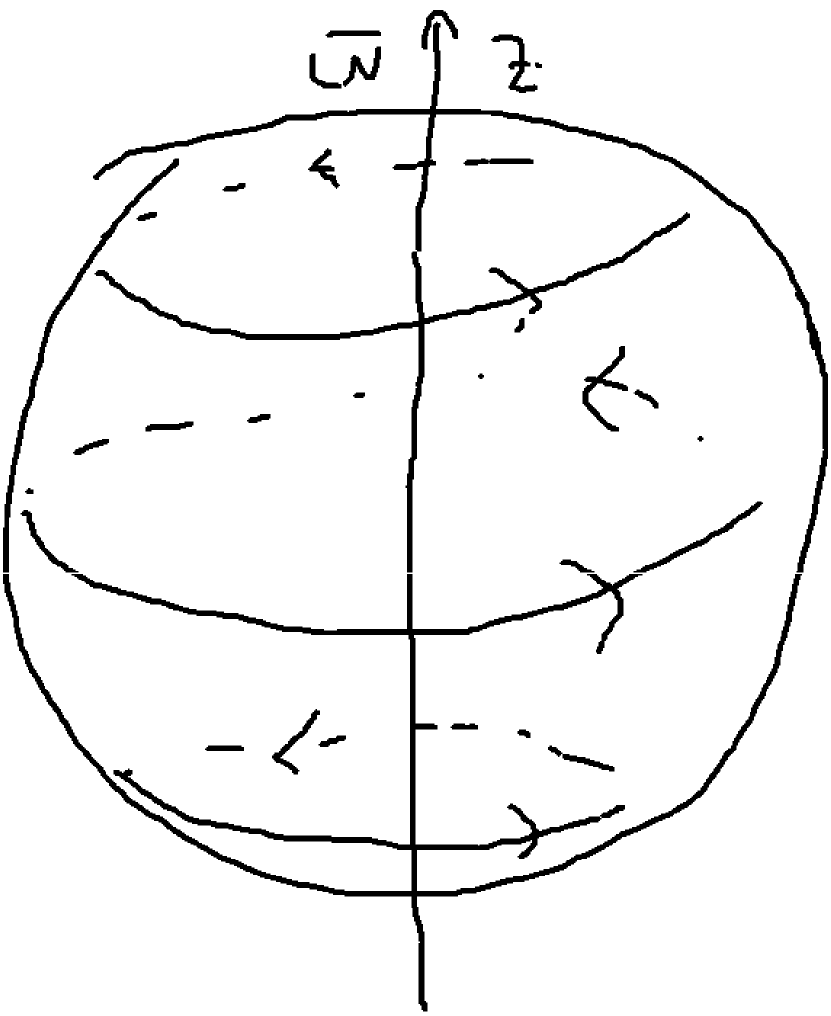
$$\bar{m} = \frac{1}{2c} \int_{R^3} [\bar{r}_1 \times j(r_1)] \, dV(\bar{r}_1)$$

Как вы поняли, первое слагаемое в разложении **A** – аналог суммарнозарядового, второе – аналог дипольного. Только если в случае разложения φ суммарнозарядовое слагаемое обнуляется только если суммарный заряд 0, то в случае **A** первое слагаемое обнулится всегда, потому что суммарный ток по нашей области должен быть 0 (не 0 будет, только если куски провода выходят за пределы нашей области, от которой мы считаем векторный потенциал).

Таким образом, главная роль всегда будет у второго – магнитопольного. Если и оно занулится, то надо уже третье доставать, но они будет настолько сложным, что его не дал даже Шишанин.

Возможно, у вас возник вопрос: почему в разложении A у второго слагаемого нет множителя 1/c, который есть у первого? Ответ: потому что этот множитель традиционно уже учитывается, когда мы считаем **m** (посмотрите формулу для него).

Задачу! Вы хотите, чтобы я разобрал задачу. Итак, разбираем задачу 5.4. Взяли шар радиусом R, равномерно заряженный зарядом q и раскрутили его до угловой скорости ω. Найти векторный потенциал и магнитное поле (т.е. **H**) на точках наблюдения, достаточно далёких от шара.



Решаем, как обычно, в два этапа:

1) Находим характеристику системы (в данном случае – магнитный момент **m**)

2) Находим потенциал в точке наблюдения, создаваемой этой характеристикой системы

Погнали. Пункт 1. Выписываем определение магнитного момента

$$\bar{m} = \frac{1}{2c} \int_{R^3} [\bar{r}_1 \times j(r_1)]\, dV(\bar{r}_1)$$

Интеграл, очевидно, будет не по всему пространству, а лишь по шару, поэтому R^3 заменится на шар. Также потребуется найти плотность тока во всех точках шара. Воспользуемся тем, что

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

А плотность заряда найти совсем легко: это суммарный заряд делить на объём шара, т.е.

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Скорость **v** выразим как векторное произведение [**ω** x r_1].
Подставляем всё это в формулу для **m**

$$\bar{m} = \frac{1}{2c}\int\limits_{\text{шар}} \left[\bar{r}_1 \times [\bar{\omega} \times \bar{r}_1]\right] dV(\bar{r}_1) \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

А далее нужно аккуратно подсчитать интеграл по всему шару. Распишу его подсчёт.

Для начала избавимся от двойного векторного произведения по формуле «бац минус цаб»

$$\bar{m} = \frac{1}{2c}\int\limits_{\text{шар}} \left[\bar{\omega}(\bar{r}_1 \bar{r}_1) - \bar{r}_1(\bar{\omega}\,\bar{r}_1)\right] dV(\bar{r}_1) \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

После чего переходить уже к тройному интегралу в сферических координатах (r_1, φ, θ).

$$\bar{m} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\frac{1}{2c}\iiint\limits_{\substack{r_1 \in [0..R] \\ \varphi \in [0..2\pi] \\ \theta \in [0..\pi]}} \left(\bar{\omega}\, r_1^2 - \bar{r}_1\, \omega r_1 \cos\theta\right) r_1^2 \sin\theta \, dr_1\, d\varphi\, d\theta$$

Не забываем про якобиан перехода: $r_1^2\sin\theta$.
От φ подынтегральная функция не зависит, поэтому интеграл по φ даст просто 2π в качестве множителя.

$$\bar{m} = \frac{q}{\frac{4}{3}c R^3}\iint\limits_{\substack{r_1 \in [0..R] \\ \theta \in [0..\pi]}} \left(\bar{\omega}\, r_1^2 - \bar{r}_1\, \omega r_1 \cos\theta\right) r_1^2 \sin\theta \, dr_1\, d\theta$$

Разложим оставшиеся вектора по ортам:

$$\overline{m} = \frac{q}{\frac{4}{3}cR^3} \iint\limits_{\substack{r_1 \in [0..R] \\ \theta \in [0..\pi]}} \left(\omega r_1^2 \overline{e_z} - r_1 \omega r_1 \cos^2\theta \, \overline{e_z}\right) r_1^2 \sin\theta \, dr_1 \, d\theta$$

У $\mathbf{r_1}$ вообще три проекции, а не только зетовая. Но мы в силу симметрии можем сказать, что исковая и игрековая в результате интегрирования занулятся, т.к. в **m** должен быть направить вдоль оси симметрии z.
Ну а далее приводим подобные:

$$\overline{m} = \frac{q\overline{e_z}}{\frac{4}{3}cR^3} \iint\limits_{\substack{r_1 \in [0..R] \\ \theta \in [0..\pi]}} \omega r_1^2 (1-\cos^2\theta) \, r_1^2 \sin\theta \, dr_1 \, d\theta$$

Получаем ОТТ – квадрат синуса. Делим оставшиеся переменные, и двойной интеграл превращается в произведение одиночных

$$\overline{m} = \frac{q\omega\overline{e_z}}{\frac{4}{3}cR^3} \underbrace{\int_0^R r_1^4 \, dr}_{=\frac{R^5}{5}} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta}_{=\frac{4}{3}}$$

Сокращаем числитель и знаменатель, оказывается, что магнитный момент тогда равен

$$\vec{m} = \frac{qR^2\omega}{5c}\overrightarrow{e_z}$$

Таким образом, при взятии интеграла мы использовали следующие трюки:
1) Если есть двойное векторное произведение – то бац-цаб
2) Заменить интеграл по объёму тройным по одномерным переменным

3) В 90% случаев подынтегральное выражение не будет зависеть от φ, поэтому по φ можно сразу проинтегрировать, вылезет множитель 2π
4) Чтобы избавиться от векторов – раскладывать по ортам.

У нас ещё пункт 2 задачи – посчитать сам векторный потенциал. Тут всё просто, надо тупо подставить:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m} \text{ x } \vec{r}]}{r^3} = \frac{qR^2}{5c}\frac{[\vec{\omega} \text{ x } \vec{r}]}{r^3}$$

А чтобы найти **H**, надо взять от **A** ротор, что будет достаточно противно. Это вы уже сами.

Шишанин также упомянул т.н. гиромагнитное отношение. Давайте чуток про него скажем. Это некоторый аналог удельного заряда.

Гиромагнитное отношение – это отношение двух коллинеарных векторов: магнитного момента к механическому моменту импульса.

Подсчитаем момент импульса для нашего шара. Момент инерции – 2/5*m*R^2 (m нежирное – это скаляр, т.е. масса!). Тогда гиромагнитное отношение

$$\frac{\vec{m}}{\vec{L}} = \frac{\frac{qR^2\omega}{5c}\vec{e_z}}{\frac{2mr^2}{5}\vec{e_z}} = \frac{q}{2mc}$$

Т.е. он равен удельному заряду системы, делённому на 600 тыс км/с.
Таким образом, если мы возьмём объект с фиксированным удельным зарядом, который мы знаем (например, электрон) и отправим его вращаться в атоме, то на каких орбитах он бы не вращался, отношение m к L будет нам известно.
Как вы догадываетесь, были проведены опыты, где это отношение измерялось и оно оказалось неверным. Именно так люди поняли, что у электрона есть ещё свой момент импульса, именуемый спином.